Aufgaben: Wiederholung

Teil 1: Lineare Gleichungssysteme, Vektorrechnung und analytische Geometrie

Aufgabe 1

(1) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$x-7\cdot y-z=-12$$
$$x+2\cdot y+5\cdot z=9$$
$$x+y+z=0$$

(2) Wir haben die Matrizen $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ und $B=\begin{pmatrix} h & i & j \\ k & l & m \\ n & o & p \end{pmatrix}$ $(\det B=0)$. Kreuzen Sie an, welche Operationen möglich sind.

$A+B$	$A^T\cdot B$	$A\cdot B$	$B\cdot B^{-1}$	$B\cdot A$	$B-A$	$B\cdot B$	$B+B$

(3) Bestimmen Sie $A\cdot B$ für $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

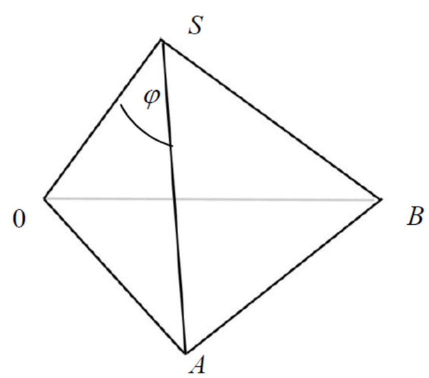
Aufgabe 2

Berechnen Sie die Flächen der Parallelogramme mit den gegebenen Eckpunkten:

(1) $A(2|6), B(-1|0), C(5|-3)$, (2) $A(13|51|26), B(1|1|-1)$, $C(17|-22|3)$.

Aufgabe 3

Die folgende Figur hat die Eckpunkte $A(5|7|0)$, $B(0|5|0)$, $S(3|5|7)$ und $0(0|0|0)$.



(1) Bestimmen Sie den Winkel φ.

(2) Bestimmen Sie die Fläche ABS.

(3) Die Fläche ABS liegt in der Ebene ε. Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene ε an.

(4) Bestimmen Sie die Entfernung von ε zum Nullpunkt.

(5) Prüfen Sie, ob $M(1|3|5)$ in ε liegt.

Aufgabe 4

Wir haben die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}10\\-3\\9\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}-5\\-4\\11\end{pmatrix}$. Berechnen Sie

(1) $\vec{b}\bullet(\vec{c}+\vec{a})$, (2) $\vec{a}\bullet(\vec{c}-\vec{b})$.

Aufgabe 5

Stellen Sie den Vektor $\vec{d}=\begin{pmatrix}-3\\6\\0\end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\-3\\-3\end{pmatrix}$ dar.

Aufgabe 6

Prüfen Sie die Vektoren jeweils auf lineare Unabhängigkeit.

(1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}7\\-16\\-16\end{pmatrix}$, (2) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-5\\2\\9\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\-4\\-6\end{pmatrix}$

Aufgabe 7

Finden Sie eine Parameterdarstellung der Ebene $\varepsilon:\quad x-2\cdot y+z=1$.

Aufgabe 8

Die Punkte $A(1|0|0)$, $B(1|0|1)$ und $C(0|1|2)$ liegen in der Ebene ε.

(1) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung von ε.

(2) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Richtungsvektoren.

(3) Bestimmen Sie eine Koordinatenform von ε.

(4) Prüfen Sie, ob $M_1\left(-6|5|3\right)$ in ε liegt.

(5) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $M_2\left(0|2|2\right)$ von ε.

(6) Bestimmen Sie den Durchstoßpunkt S von $G:\vec{r}=\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1/2\\-3/2\\-3\end{pmatrix}$ und ε.

(7) Welche Werte hat m_x, damit $M_3\left(m_x|1|2\right)$ von ε den Abstand $d=1$ hat?

(8) Bestimmen Sie einen Punkt D, so dass A, B, C und D ein Parallelogramm bilden.

Teil 2: Komplexe Zahlen

Aufgabe 1

Vervollständigen Sie die Tabelle. Rechnen Sie, wenn nötig, auf drei Nachkommastellen genau.

	Kartesische Form	Trigonometrische Form	Exponentialform
z_1			$\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot 45°}$
z_2	$-4+7\cdot i$		
$\overline{z}_1$			
$\overline{z}_2$			
z_1+z_2			
z_1-z_2			
$z_1\cdot z_2$			
$\frac{z_1}{z_2}$			
$\left(z_1\right)^4$			

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle Lösungen von $w^5=z=5\cdot i$, und zeichnen Sie diese in ein Koordinatensystem. Rechnen Sie, wenn nötig, auf drei Nachkommastellen genau.

Teil 3: Funktionen

Aufgabe 1

Wir haben die Funktion $f(x)=\begin{cases} \frac{3}{2}\cdot x \text{ für } x<3 \\ a \text{ für } x=3 \\ \frac{x^2}{5-x} \text{ für } x>3 \end{cases}$ $\quad \mathbb{D}_f=\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq 5\}$.

Welchen Wert muss a haben, damit die Funktion an der Stelle $x=3$ stetig ist?

Aufgabe 2

Ermitteln Sie jeweils die zweite Ableitung:

(1) $f(x)=x^4+x^3+x^2+x$, (2) $f(x)=\ln(x+1)$, (3) $f(x)=4\cdot e^{\sin(6\cdot x)}$,

(4) $f(x)=\cos(9\cdot x^3)$, (5) $f(x)=2^x$, (6) $f(x)=\frac{x+3}{x-3}$

Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion $f(x)=x^3-x^2-2\cdot x+2 \quad \mathbb{D}_f=\mathbb{R}$.

(1) Bestimmen Sie alle reellen Nullstellen.
(2) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte.
(3) Bestimmen Sie alle Wendepunkte.
(4) Bestimmen Sie alle Asymptoten.
(5) Zeichnen Sie die Funktion im Intervall $x\in[-2;2]$.
(6) Bestimmen Sie die Fläche zwischen der x-Achse und dem Funktionsgraphen im Intervall $x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Aufgabe 4

Ergänzen Sie die folgenden Sätze:

(1) Wenn $x_N=2$ eine Nullstelle einer geraden Funktion ist, dann ist auch _______ eine Nullstelle dieser Funktion.
(2) Wenn $f(3)$ ein lokales Minimum einer ungeraden Funktion ist, dann ist ______ ein lokales Maximum dieser Funktion.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie das Polynom 3. Grades mit folgenden Eigenschaften:

- $x_N = 1$ ist Nullstelle.
- $x_W = -1$ ist Wendestelle.
- $E(0|-3)$ ist Extrempunkt.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie für $f(x) = 3^x + x \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ mit dem Newton-Verfahren die Nullstelle auf drei Nachkommastellen genau.

Aufgabe 7

Zerlegen Sie $f(x) = 4 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3 + 28 \cdot x^2 + 36 \cdot x - 72 \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ in Linearfaktoren.

Aufgabe 8

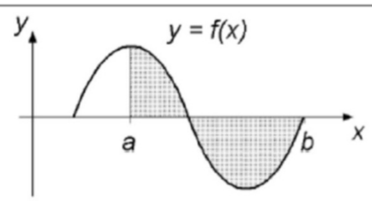
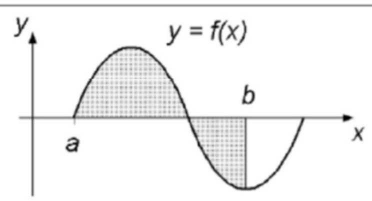
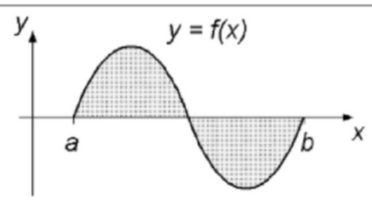
(1) Warum ist der folgende Satz falsch?

„$F(x) = x^3$ ist die Stammfunktion von $f(x) = 3 \cdot x^2$."

(2) Korrigieren Sie den Satz, so dass er richtig wird.

Aufgabe 9

Kreuzen Sie das Vorzeichen der Integrale an.

		>0	$=0$	<0
	$\int_a^b f(x)\,dx$			
	$\int_a^b f(x)\,dx$			
	$\int_a^b f(x)\,dx$			

Aufgabe 10

Berechnen Sie folgende Integrale auf vier Nachkommastellen genau.

(1) $\int_{-\pi/2}^{2\cdot\pi} \sin(3\cdot x)-\frac{1}{2}\cdot x^3 dx$, (2) $\int_0^3 \frac{x^2}{2\cdot x+3} dx$, (3) $\int_{-1}^1 x^2\cdot 2^x dx$, (4) $\int_1^5 \frac{x-3}{x+3} dx$

Aufgabe 11

Bestimmen Sie x_B, damit $\int_0^{x_B} (2\cdot x+1)^3 \, dx = 10$ gilt.

Teil 4: Differenzialgleichungen

Aufgabe 1

Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem:

$f''(x)-2\cdot f'(x)-3\cdot f(x)=x^2 \quad f(0)=0, f'(0)=0$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $f(x)=f_h(x)+f_p(x)$ von $f''(x)-f(x)=e^x$.

